

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.  
Mathematisk-fysiske Meddelelser **XV**, 2.

---

# FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG UND GESCHARTE KOLLINEATIONEN

VON

DAVID FOG



KØBENHAVN  
LEVIN & MUNKSGAARD  
EJNAR MUNKSGAARD

1937

Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Es handelt sich in dieser Abhandlung um die Bestimmung der gescharten Kollineationen des Raumes, durch welche eine gegebene, nicht ausgeartete Fläche zweiter Ordnung in eine gegebene andere übergeführt wird.

Diese Aufgabe vergleichen wir zunächst mit der ebenen Aufgabe, diejenigen Homologien zu finden, bei welchen zwei Kegelschnitte einer und derselben Ebene einander entsprechen. Die letztgenannte Aufgabe hat bekanntlich eine endliche Anzahl von Lösungen (bei allgemeiner Lage der beiden Kurven genau 12), in Übereinstimmung damit, dass sowohl  $\infty^5$  Kegelschnitte als auch  $\infty^5$  Homologien in der Ebene vorhanden sind. Nun gibt es auch im Raume »gleich viele« Flächen zweiter Ordnung und gescharte Kollineationen, nämlich  $\infty^9$ ; man könnte deshalb erwarten, dass die oben angeführte räumliche Aufgabe ebenfalls im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lösungen besitzt. Dies ist jedoch, wie wir sehen werden, nicht der Fall. Zwei Flächen zweiter Ordnung allgemeiner Lage entsprechen sich bei keiner gescharten Kollineation. Der scheinbare Widerspruch löst sich, wie aus dem folgenden hervorgehen wird, dadurch, dass unendlich viele gescharte Kollineationen existieren, die eine Fläche zweiter Ordnung in eine zweite überführen, sobald es eine solche Kollineation gibt.

Über den betrachteten Gegenstand ist dem Verfasser nur eine Arbeit von K. ROHN<sup>1</sup> bekannt. Es werden dort die har-

<sup>1</sup> K. ROHN: Geschart-involutorische Lage zweier Flächen 2. Grades. Leipz. Ber. 66 (1914), S. 60.

monischen gescharten Kollineationen bestimmt, welche zwei Flächen zweiter Ordnung vertauschen.

### § 1. Die drei Typen von Achsen.

Eine gescharte Kollineation ist eine Kollineation, bei der zwei windschiefe Geraden, die Achsen der Transformation, punktweise und ebenenweise festbleiben. Diese Achsen sind im allgemeinen getrennt, können aber auch »konsekutiv« sein und einen Streifen einer Regelfläche bestimmen. Man könnte die Achsen auch als zwei sich schneidende Geraden annehmen; dann würde aber die Transformation eine parabolische Homologie sein (d. h. eine Homologie, deren Zentrum in der Homologieebene enthalten ist). Solche Homologien wollen wir hier nicht aufsuchen, sondern nur insofern mitnehmen, als sie in natürlicher Weise mit den eigentlichen gescharten Kollineationen zusammen auftreten.

Sind bei einer gescharten Kollineation  $(M, M_1)$  ein Paar von entsprechenden Punkten,  $E$  und  $F$  die Schnittpunkte der Geraden  $MM_1$  mit den beiden Achsen, dann ist das Doppelverhältnis  $(EFMM_1)$  nur von der Transformation, nicht von dem Punktepaare  $(M, M_1)$  abhängig.

Die zwei Flächen zweiter Ordnung seien  $\varphi$  und  $\varphi_1$ ; wir suchen die gescharten Kollineationen, welche  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen. Für eine Achse einer solchen Transformation muss gelten, dass jeder Punkt, welchen sie mit der einen Fläche gemein hat, auch der anderen angehört und dass jede durch sie gehende Tangentialebene an die eine Fläche auch die andere berührt. Es erweisen sich daher die folgenden drei Typen von Achsen als möglich:

I. Die Achse schneidet die Flächen in denselben zwei Punkten und liegt in zwei gemeinsamen Tangentialebenen.

II. Die Achse ist Tangente in einem Berührungspunkt der beiden Flächen.

III. Die Achse ist eine gemeinsame Erzeugende der beiden Flächen; diese müssen sich dann in allen Punkten dieser Erzeugenden berühren.

Wir zeigen nun:

Jede Gerade, welche die in I genannten Bedingungen erfüllt, ist Achse zweier gescharten Kollineationen, welche  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen.

Die Achse sei  $a$ , ihre Schnittpunkte mit den Flächen  $A$  und  $B$ ; ferner möge die eine durch  $a$  gehende Tangentialebene  $\varphi$  und  $\varphi_1$  in  $P$  bzw.  $P_1$ , die andere in  $Q$  bzw.  $Q_1$  berühren. Die

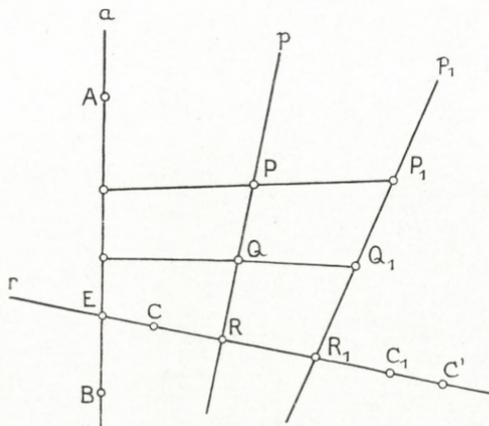


Fig. 1.

Gerade  $p = PQ$  bzw.  $p_1 = P_1Q_1$  ist dann die Polare von  $a$  in bezug auf  $\varphi$  bzw.  $\varphi_1$ ; sowohl  $p$  als auch  $p_1$  sind zu  $a$  windschief. Die folgenden zwei Fälle sind nun zu betrachten:

1)  $p$  und  $p_1$  sind zu einander windschief (Fig. 1). Die drei Geraden  $a, p, p_1$  bestimmen dann eine Fläche zweiter Ordnung, auf welcher die andere Achse zu suchen ist. Diese Fläche geht bei der Transformation in der Weise in sich selbst über, dass jede Erzeugende des von  $a, p, p_1$  verschiedenen Systems in sich selbst transformiert wird. Es sei  $r$  eine solche von  $PP_1$  und  $QQ_1$  verschiedene Gerade.



entsprechenden Zentren seien  $N$  und  $N'$ ; sie liegen auf der Geraden  $SRR_1$ . Die gescharte Kollineation mit den Achsen  $a$  und  $MN$  (oder  $MN'$ ), welche  $p$  in  $p_1$  überführt, führt dann  $z$  in  $z_1$  und daher auch  $\varphi$  in  $\varphi_1$  über. Es gibt demnach auch in diesem Fall zwei gescharte Kollineationen der gesuchten Art. Doch kann insbesondere  $N$  (oder  $N'$ ) in  $S$  fallen; die eine der Kollineationen wird dann eine parabolische Homologie.

Der Beweis gilt bis auf unwesentliche Änderungen, wenn  $p$  mit  $p_1$  zusammenfällt; die beiden gescharten Kollineationen haben dann dieselben Achsen und nur verschiedene charakteristische Doppelverhältnisse.

Dem Achsentypus III entsprechend erhält man:

Wenn sich  $\varphi$  und  $\varphi_1$  längs einer Erzeugenden berühren, gibt es  $\infty^2$  gescharte Kollineationen mit dieser Erzeugenden als Achse, welche  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen.

$\varphi$  und  $\varphi_1$  haben nämlich ausser der Berührungserzeugenden  $a$  noch zwei andere (evtl. konsekutive) gemeinsame Erzeugende,  $b$  und  $c$ . Benutzt man, dass  $b$  und  $c$  in Verbindung mit den beiden konsekutiven Erzeugenden  $a$  und noch einem Punkt von  $\varphi_1$  diese Fläche eindeutig festlegen, so sieht man, dass die andere Achse unter den Transversalen von  $b$  und  $c$  beliebig gewählt werden kann.

Im Gegensatz hierzu ist eine Gerade, welche den Bedingungen II genügt, im allgemeinen keine Achse einer gescharten Kollineation, die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführt. Denn es gibt  $\infty^7$  Flächen zweiter Ordnung, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen ihrer Punkte berühren, aber nur  $\infty^5$  gescharte Kollineationen, welche die genannte Gerade als eine Achse haben.

Um die Achsen der eventuellen gescharten Kollineationen, die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen, näher zu bestimmen, stellen wir die folgende Überlegung an:

Es seien  $a$  und  $b$  ein Paar zusammengehöriger Achsen. Sie werden von (mindestens) einem Paar von Geraden,  $\alpha$  und  $\beta$ , geschnitten, die polar in bezug auf  $\varphi$  sind. Da  $a$  und  $\beta$  bei der gescharten Kollineation festbleiben, sind sie auch polar in bezug auf  $\varphi_1$ . Die Achsen  $a$  und  $b$  werden also von einem Paar gemeinsamer Polargeraden  $\alpha$  und  $\beta$  der beiden Flächen geschnitten. (Dies gilt auch, wenn  $a$  und  $b$  konsekutive Geraden sind.) Es erweisen sich drei verschiedene Lagen der Geraden  $\alpha$  und  $\beta$  als möglich:

1)  $\alpha$  und  $\beta$  sind zu einander windschief.

2)  $\alpha$  und  $\beta$  gehören derselben Ebene an; diese ist dann Tangentialebene in einem Berührungspunkt der Flächen. Eine der Achsen geht durch den Berührungspunkt, die andere liegt in der Tangentialebene. Diese Ebene geht in sich selbst über, und die Transformation in ihr ist eine Homologie mit dem genannten Berührungspunkt als Zentrum; die Ebene schneidet demnach  $\varphi$  und  $\varphi_1$  in denselben zwei Erzeugenden.  $\varphi$  und  $\varphi_1$  müssen also, wenn dieser Fall vorkommen soll, zwei einander schneidende Erzeugende gemein haben.

3)  $\alpha$  und  $\beta$  fallen zusammen;  $\varphi$  und  $\varphi_1$  haben dann eine Erzeugende gemein.

## § 2. Die gegenseitige Lage der Flächen.

Wir wollen im folgenden — von einem letzten § 6 abgesehen — die Untersuchung auf diejenigen Fälle beschränken, wo  $\varphi$  und  $\varphi_1$  (mindestens) ein gemeinsames Polar-

tetraeder haben. Es liegen dann 4 Möglichkeiten vor, die dem folgenden Aussehen der Schnittkurve entsprechen:

A. Eine Raumkurve 4. Ordnung ohne Doppelpunkte oder Spitze.

B. Zwei Kegelschnitte (in verschiedenen Ebenen) mit zwei gemeinsamen Punkten.

C. Vier Geraden, die ein windschiefes Viereck bilden.

D. Ein doppeltzählender Kegelschnitt.

Ehe wir die eigentliche Untersuchung weiterführen, wollen wir einige Einzelheiten über die genannten Lagen, insbesondere über die gemeinsamen Polartetraeder der beiden Flächen angeben.

Lage A. Die Flächen haben keinen Berührungspunkt; sie haben 1 gemeinsames Polartetraeder.

Lage B. Die Flächen berühren einander in 2 Punkten, etwa  $P$  und  $Q$  (die Schnittpunkte der Kegelschnitte); ihre Verbindungsgerade  $PQ = l$  hat dieselbe Polare  $l'$  in bezug auf beide Flächen. Es gibt  $\infty^1$  gemeinsame Polartetraeder; diese haben alle ein Paar gegenüberliegender Kanten auf  $l$  und  $l'$ . Die auf  $l'$  liegende Eckpunkte sind allen Tetraedern gemein; auf  $l$  können als Eckpunkte die Punkte jedes Paares auftreten, das von  $(P, Q)$  harmonisch getrennt wird.

Lage C. Die Flächen berühren einander in 4 Punkten (die Eckpunkte des Vierecks). Sie haben  $\infty^2$  gemeinsame Polartetraeder, die die Diagonalen des Vierecks als gemeinsame gegenüberliegende Kanten haben. Als Eckpunkte können auf jeder Diagonale die Punkte eines beliebigen Paares auftreten, das von dem entsprechenden Paar von Berührungspunkten harmonisch getrennt wird.

Lage D. Die Flächen berühren einander in allen Punkten des gemeinsamen Kegelschnittes; die Ebene des Kegelschnittes hat denselben Pol,  $O$ , in bezug auf beide Flächen.

Es gibt hier  $\infty^3$  gemeinsame Polartetraeder; diese haben alle einen Eckpunkt in  $O$ , und die drei anderen liegen in der Ebene des Kegelschnittes und können als Eckpunkte eines beliebigen Polardreieckes dieser Kurve gewählt werden.

Gegenüberliegende Kanten eines gemeinsamen Polartetraeders sind immer Polargeraden in bezug auf beide Flächen. Umgekehrt hat man bei den hier betrachteten 4 Lagen, dass jedes Paar windschiefer gemeinsamer Polaren der beiden Flächen Träger eines Paares von gegenüberliegenden Kanten eines gemeinsamen Polartetraeders sind.<sup>1</sup>

Wählt man ein gemeinsames Polartetraeder als Koordinatentetraeder, so können  $\varphi$  und  $\varphi_1$  durch die Gleichungen

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = 0$$

dargestellt werden. In den Fällen, wo mehrere Polartetraeder vorhanden sind, kann man für alle solchen Polartetraeder die Gleichungen (1) mit denselben  $\lambda$  benutzen. Der Lage A entspricht, dass alle vier  $\lambda$  verschieden sind; B erhält man, wenn 2 (und nur 2) einander gleich sind. C entspricht, dass sie paarweise einander gleich sind, z. B.  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4$ , und D ergibt sich, wenn 3 (und nur 3)  $\lambda$  einander gleich sind.

### § 3. Die Bestimmung der Achsen.

Wir kehren nun zur Untersuchung der gescharten Kollineationen, die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen, zurück, und beginnen mit den Lagen A, B und D, da bei C besondere Verhält-

<sup>1</sup> Dagegen kann es bei anderen Lagen, wo kein gemeinsames Polartetraeder vorhanden ist, dennoch sehr wohl ein Paar windschiefer gemeinsamer Polaren geben.

nisse vorliegen; dieser Fall wird daher am besten für sich allein behandelt (§ 5).

Bei den drei angeführten Lagen von  $\varphi$  und  $\varphi_1$  sieht man, dass die Möglichkeiten 2) und 3) auf Seite 8 sich nicht realisieren lassen, so dass ein Paar zusammengehöriger Achsen notwendig ein Paar von windschiefen gemeinsamen Polaren der Flächen, also ein Paar gegenüberliegender Kanten eines gemeinsamen Polartetraeders schneiden müssen.

Wir suchen in diesem Paragraphen die Achsen des Typus I (siehe Seite 4). Die Gleichungen der Flächen in Punktkoordinaten seien die oben angeführten (1); in Ebenenkoordinaten lauten sie

$$(2) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{u_1^2}{\lambda_1} + \frac{u_2^2}{\lambda_2} + \frac{u_3^2}{\lambda_3} + \frac{u_4^2}{\lambda_4} = 0.$$

Als eventuelle Achse betrachten wir eine Gerade, die in Punktkoordinaten durch die Gleichungen

$$(3) \quad x_1 = \alpha x_2, \quad x_3 = \beta x_4,$$

in Ebenenkoordinaten durch

$$(4) \quad \alpha u_1 + u_2 = 0, \quad \beta u_3 + u_4 = 0$$

dargestellt ist. Ihre Schnittpunkte mit den Flächen werden durch

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + 1)x_2^2 + (\beta^2 + 1)x_4^2 &= 0, \\ (\alpha^2\lambda_1 + \lambda_2)x_2^2 + (\beta^2\lambda_3 + \lambda_4)x_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Die durch die Gerade gehenden Tangentialebenen ergeben sich auf duale Weise aus

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + 1)u_1^2 + (\beta^2 + 1)u_3^2 &= 0, \\ \left(\frac{\alpha^2}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right)u_1^2 + \left(\frac{\beta^2}{\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_3}\right)u_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Soll nun die Gerade sowohl durch zwei (verschiedene) gemeinsame Punkte der Flächen gehen als auch in zwei (verschiedenen) gemeinsamen Tangentialebenen liegen, so erfordert dies das Bestehen der Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} (\alpha^2 \lambda_1 + \lambda_2) (\beta^2 + 1) = (\beta^2 \lambda_3 + \lambda_4) (\alpha^2 + 1), \\ \lambda_3 \lambda_4 (\alpha^2 \lambda_1 + \lambda_2) (\beta^2 + 1) = \lambda_1 \lambda_2 (\beta^2 \lambda_3 + \lambda_4) (\alpha^2 + 1) \end{cases}$$

in der Weise, dass nicht beide Seiten null werden. Also muss

$$(6) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4$$

sein.<sup>1</sup> Ist umgekehrt diese Gleichung erfüllt, so reduzieren sich die Gleichungen (5) auf eine,

$$(7) \quad (\alpha^2 \lambda_1 + \lambda_2) (\beta^2 + 1) = (\beta^2 \lambda_3 + \lambda_4) (\alpha^2 + 1),$$

und jedes Wertepaar  $(\alpha, \beta)$ , das (7) befriedigt, ohne beide Seiten zum Verschwinden zu bringen, erweist sich leicht als eine Gerade vom Typus I, also als eine Achse. Es gibt also unter der Bedingung (6)  $\infty^1$  gescharte Kollineationen, die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen. Die zugehörigen Achsen sind Erzeugende einer Regelfläche mit der Gleichung

$$(8) \quad (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) (x_3^2 + x_4^2) = (\lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2) (x_1^2 + x_2^2)$$

oder in Ebenenkoordinaten

$$(9) \quad \left( \frac{u_1^2}{\lambda_1} + \frac{u_2^2}{\lambda_2} \right) (u_3^2 + u_4^2) = \left( \frac{u_3^2}{\lambda_3} + \frac{u_4^2}{\lambda_4} \right) (u_1^2 + u_2^2);$$

sie ist von 4. Ordnung und 4. Klasse und besitzt zwei windschiefe Doppelgeraden.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Die Relation (6) als Ausdruck der Bedingung I (Seite 4) findet sich bei ROHN, S. 73, ohne Verbindung mit dem hier betrachteten Problem der allgemeinen gescharten Kollineationen.

<sup>2</sup> Vgl. Encykl. d. math. Wiss. III, 2, 2 b, S. 1753.

Wir können der Gleichung (6) eine einfache geometrische Deutung geben. Wir bemerken zunächst, dass es 8 Kollineationen gibt, die die Eckpunkte des Koordinatentetraeders zu Fixpunkten haben, und die ausserdem  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen. Sie werden durch

$$(10) \quad \begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{\lambda_1} x'_1, & x_2 &= \pm \sqrt{\lambda_2} x'_2, & x_3 &= \pm \sqrt{\lambda_3} x'_3, \\ & & x_4 &= \pm \sqrt{\lambda_4} x'_4 \end{aligned}$$

dargestellt.

Betrachten wir nun die Kollineation

$$(11) \quad x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = m x'_3, \quad x_4 = \frac{1}{m} x'_4.$$

Sie lässt die Gerade  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$  punktweise und die Gerade  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  ebenenweise fest. Sie kann als Produkt zweier harmonischen Homologien aufgefasst werden, deren Homologieebenen durch die erste der genannten Geraden gehen und deren Zentren auf der zweiten liegen, und mag deshalb als eine »projektive Drehung« bezeichnet werden. Umgekehrt hat jede projektive Drehung der betrachteten Art eine Darstellung der Form (11). Eine andere projektive Drehung, wo die Achsen ihre Rolle vertauscht haben, sei

$$x_1 = n x'_1, \quad x_2 = \frac{1}{n} x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = x'_4.$$

Das Produkt dieser beiden Drehungen (in beliebiger Reihenfolge) ist die Kollineation

$$x_1 = n x'_1, \quad x_2 = \frac{1}{n} x'_2, \quad x_3 = m x'_3, \quad x_4 = \frac{1}{m} x'_4;$$

sie möge eine »projektive Schraubung« um die genannten

Achsen heissen. Wir fragen nun, wann die allgemeine Kollineation

$$x_1 = \mu_1 x'_1, \quad x_2 = \mu_2 x'_2, \quad x_3 = \mu_3 x'_3, \quad x_4 = \mu_4 x'_4$$

eine projektive Schraubung um die genannten Achsen ist. Als notwendig und hinreichend erweist sich

$$\mu_1 \mu_2 = \mu_3 \mu_4.$$

Wir sehen daher, dass das Erfülltsein von (6) bedeutet, dass 4 von den oben genannten 8 Kollineationen, die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen, projektive Schraubungen um das oben erwähnte Paar von gegenüberliegenden Kanten des Koordinatentetraeders sind.

Wir wollen nun die einzelnen Lagen A, B und D etwas näher betrachten.

Lage A. Im allgemeinen gibt es keine Lösungen; nur wenn (6) oder eine damit analoge Gleichung erfüllt ist, gibt es eine Schar von  $\infty^1$  Achsen. Denkt man sich die Flächen als konzentrische Ellipsoide mit gemeinsamen Symmetrieebenen, so dass die Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten

$$(12) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

geschrieben werden können, so ist (6) mit

$$\frac{ab}{c} = \frac{a_1 b_1}{c_1}$$

gleichbedeutend.

Lage B. Es sei z. B.  $\lambda_3 = \lambda_4$ . Die Schnittkurve der Flächen zerfällt in zwei Kegelschnitte, die in den Ebenen

$$(13) \quad \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3} x_1 \pm \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2} x_2 = 0$$

liegen und sich in den Punkten  $(0, 0, 1, \pm i)$  schneiden. Wie oben gibt es im allgemeinen keine Lösungen; die Gleichung (6) erhält hier die Form

$$(14) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3^2,$$

und die Bedingung (7) für  $a$  und  $\beta$  wird nach Division durch  $\beta^2 + 1$ :

$$a^2(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_2 - \lambda_3 = 0.$$

Hieraus erhält man

$$(15) \quad \alpha = \pm \frac{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}, \quad \beta \text{ beliebig,}$$

also die Achsen

$$(16) \quad \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3} x_1 \pm \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2} x_2 = 0, \quad x_3 = kx_4.$$

Sie bilden zwei Geradenbüschel, die in den Ebenen (13) der Kegelschnitte liegen und ihre Zentren in den Punkten haben, wo diese Ebenen die Polare der gemeinsamen Sehne der Kegelschnitte schneiden.

Sind  $\varphi$  und  $\varphi_1$  durch die Gleichungen (12) dargestellt, so wird

$$c = c_1, \quad ab = a_1 b_1.$$

Hieraus folgt, dass die Flächen von jeder zur  $xy$ -Ebene parallelen Ebene in zwei inhaltsgleichen Ellipsen geschnitten werden, und sie entsprechen sich demnach in zwei involutorischen Affinitäten, deren Homologieebenen die Kegelschnittsebenen sind. Man entnimmt hieraus, dass die Bedingungen

$$(17) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4 \text{ und } \lambda_3 = \lambda_4$$

damit gleichbedeutend sind, dass die Flächen  $\varphi$  und  $\varphi_1$  mit zwei Kugeln von demselben Radius (und mit nicht-isotroper Verbindungsgerade der beiden Zentren) projektiv äquivalent sind.

Die Bedingungen (17) können auch so gedeutet werden, dass 4 von den 8 Kollineationen, die die Eckpunkte des Koordinatentetraeders zu Fixpunkten haben und  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen, projektive Drehungen sind, bei denen die Schnittlinie der Kegelschnittsebenen punktweise und ihre Polare ebenenweise festbleiben.

Es soll kurz erwähnt werden, dass man, statt die Bedingung  $\lambda_3 = \lambda_4$  mit (6) zu kombinieren, diese Bedingung auch mit einer zu (6) analogen Gleichung zusammen nehmen könnte, z. B. mit

$$\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4.$$

Hieraus würde indessen  $\lambda_1 = \lambda_2$  folgen, und die Flächen hätten dann die Lage C. Dies werden wir später, in § 5, näher erörtern.

Wir bemerken noch, dass wir durch die obige Methode alle Achsen vom Typus I gefunden haben, obwohl die Flächen  $\infty^1$  gemeinsame Polartetraeder haben; denn die gefundenen Achsen sind in Beziehung zu den Flächen selbst, nicht nur zu dem gewählten Koordinatentetraeder, charakterisiert worden.

Lage D. Es gibt hier gar keine Achsen, weil (6) in Verbindung mit z. B.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  das vollständige Zusammenfallen der Flächen zur Folge haben würde.

§ 4. **Zusammengehörige Achsen.**

Wir haben in § 3 die brauchbaren Achsen bestimmt ohne Rücksicht darauf, wie sie in den gescharten Kollineationen zusammengehören. Um auch diese Frage zu beantworten, greifen wir gewissermassen das ganze Problem nochmals von vorn an, indem wir uns nur auf die §§ 1—2 stützen, und benutzen eine rein analytische Methode, weil diese — obgleich durch nicht ganz kurze Rechnungen — die Verhältnisse am besten beleuchtet und das ganze Formelsystem mit einem Schlag liefert. Wir wollen hier direkt nur gescharte Kollineationen mit getrennten Achsen aufsuchen, aber doch auch solche mit konsekutiven Achsen mitnehmen, wenn sie von selber in den Rechnungen auftreten. Dafür gibt die Methode auf einmal die Achsen vom Typus I und Typus II. Wie vorher nehmen wir an, dass die Flächen eine der Lagen A, B oder D haben; auf die Lage C gehen wir in § 5 ein.

Die Flächen  $\varphi$  und  $\varphi_1$  seien wie früher durch

$$(18) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

und

$$(19) \quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = 0$$

gegeben. Zusammengehörige Achsen müssen, wie wir wissen, zwei gegenüberliegende Kanten eines gemeinsamen Polartetraeders schneiden; wir wollen nun die gescharten Kollineationen aufsuchen, deren Achsen die Geraden  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$  schneiden. Die Achsen können dann durch

$$(20) \quad x_1 = \alpha x_2, \quad x_3 = \beta x_4 \quad \text{und} \quad x_1 = \alpha_1 x_2, \quad x_3 = \beta_1 x_4$$

dargestellt werden. Eine gescharte Kollineation mit diesen Achsen ist durch

$$\begin{aligned} x_1 - ax_2 &= p(x'_1 - ax'_2), \\ x_3 - \beta x_4 &= p(x'_3 - \beta x'_4), \\ x_1 - a_1 x_2 &= q(x'_1 - a_1 x'_2), \\ x_3 - \beta_1 x_4 &= q(x'_3 - \beta_1 x'_4) \end{aligned} \quad (a \neq a_1, \beta \neq \beta_1, p \neq q)$$

oder, wenn die Gleichungen nach  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  gelöst werden, durch

$$(21) \quad \begin{cases} (a_1 - a)x_1 = (a_1 p - a q)x'_1 - (p - q)aa_1 x'_2, \\ (a_1 - a)x_2 = (p - q)x'_1 - (ap - a_1 q)x'_2, \\ (\beta_1 - \beta)x_3 = (\beta_1 p - \beta q)x'_3 - (p - q)\beta\beta_1 x'_4, \\ (\beta_1 - \beta)x_4 = (p - q)x'_3 - (\beta p - \beta_1 q)x'_4 \end{cases}$$

gegeben. Wir verlangen nun, dass die Transformation (21)  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen soll. Bei der Einführung von (21) in (18) müssen dann zunächst die Glieder mit  $x'_1 x'_2$  und  $x'_3 x'_4$  verschwinden; dies erfordert

$$(22) \quad pa(1 + a_1^2) = qa_1(1 + a^2)$$

und

$$(23) \quad p\beta(1 + \beta_1^2) = q\beta_1(1 + \beta^2).$$

Das Einsetzen ergibt nun im übrigen, wenn wir die Striche weglassen und nur die erste Hälfte, also die Glieder mit  $x_1^2$  und  $x_2^2$ , aufschreiben:

$$(24) \quad \frac{1}{(a_1 - a)^2} \left\{ x_1^2 [p^2(1 + a_1^2) - 2pq(1 + aa_1) + q^2(1 + a^2)] + x_2^2 [p^2 a^2(1 + a_1^2) - 2pqaa_1(1 + aa_1) + q^2 a_1^2(1 + a^2)] \right\} + \dots = 0.$$

Führt man mittels der Relationen (22) und (23)  $pq$  in diejenigen Glieder von (24) als Faktor ein, wo  $p^2$  oder  $q^2$  steht, so findet man, dass sich die Gleichung (24) nach Kürzen von  $pq$  auf

$$(25) \quad \frac{x_1^2}{aa_1} + aa_1 x_2^2 + \frac{x_3^2}{\beta\beta_1} + \beta\beta_1 x_4^2 = 0$$

reduziert. Notwendig und hinreichend für die Übereinstimmung mit (19) ist:

$$(26) \quad \lambda_1 aa_1 = \frac{\lambda_2}{aa_1} = \lambda_3 \beta\beta_1 = \frac{\lambda_4}{\beta\beta_1}.$$

Die Gleichungen (22) und (23) schreiben wir so:

$$(27) \quad \frac{a_1(1+a^2)}{a(1+a_1^2)} = \frac{\beta_1(1+\beta^2)}{\beta(1+\beta_1^2)} = \frac{p}{q}.$$

Die Gleichungen (26) in Verbindung mit der ersten (27) bestimmen dann die brauchbaren Achsen und ihren Zusammenhang, während der gleichzeitig durch (27) festgelegte Wert von  $\frac{p}{q}$  das charakteristische Doppelverhältnis der Kollineation liefert.

Aus (26) erhält man zunächst die früher gefundene Bedingung

$$(28) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3 \lambda_4;$$

diese erweist sich also als notwendig nicht nur für die Existenz von Achsen vom Typus I, sondern auch vom Typus II. Ist die Bedingung erfüllt, so erhält man aus (26), wenn  $\sigma$  einen beliebigen, aber festen Wert von  $\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \sqrt{\lambda_3 \lambda_4}$  bedeutet:

$$(29) \quad aa_1 = \frac{\sigma}{\lambda_1}, \quad \beta\beta_1 = \frac{\sigma}{\lambda_3}.$$

Führt man  $a_1$  und  $\beta_1$  mittels (29) in (27) ein, so ergibt sich

$$(30) \quad \frac{\sigma(1 + \alpha^2)}{\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2} = \frac{\sigma(1 + \beta^2)}{\lambda_3 \beta^2 + \lambda_4} = \frac{p}{q}.$$

Hierdurch ist das gesuchte Formelsystem gefunden.

Die erste Gleichung (30) liefert die schon bekannte Bedingung (7) dafür, dass eine Gerade  $(\alpha, \beta)$  als Achse brauchbar ist; auch diese gilt also sowohl für Achsen vom Typus I als auch vom Typus II. Gleichzeitig erhält man den Wert des Doppelverhältnisses ausgedrückt durch die  $\lambda$  und die Parameter der einen Achse.

Aus (29) ergibt sich, in Übereinstimmung mit Seite 5—7, dass eine gewählte Achse  $(\alpha, \beta)$  mit zwei anderen zusammengehört, da  $\sigma$  zwei Werte annehmen kann (gleich gross mit entgegengesetztem Vorzeichen). Aus (30) ersieht man dann, dass auch die zwei Doppelverhältnisse gleich gross mit entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Weiter sieht man: Wenn  $(\alpha, \beta)$  und  $(\alpha_1, \beta_1)$  ein Paar zusammengehöriger Achsen ist, so gehören je zwei Achsen zusammen, die unter  $(\pm \alpha, \pm \beta)$  bzw.  $(\pm \alpha_1, \pm \beta_1)$  so gewählt sind, dass eine gerade Anzahl von Minuszeichen vorkommt. Den hierdurch gefundenen 8 Transformationen entsprechen insgesamt 2 Werte des charakteristischen Doppelverhältnisses, die gleich gross mit entgegengesetztem Vorzeichen sind; jeder Wert kommt viermal vor.

Übrigens hängt das charakteristische Doppelverhältnis, wenn  $\lambda_1 \mp \lambda_2$  und  $\lambda_3 \mp \lambda_4$  ist, von der Wahl der Achsen ab. Wir können fragen, wann es gleich  $-1$  wird; dies tritt nach (30) ein, wenn

$$\sigma(1 + \alpha^2) + \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 = 0, \quad \sigma(1 + \beta^2) + \lambda_3 \beta^2 + \lambda_4 = 0.$$

Dies lässt sich, immer unter der Voraussetzung  $\lambda_1 \mp \lambda_2$ ,  $\lambda_3 \mp \lambda_4$ , auf

$$(31) \quad \alpha^2 = -\frac{\sigma}{\lambda_1}, \quad \beta^2 = -\frac{\sigma}{\lambda_3}$$

reduzieren. Wegen der zwei Werte von  $\sigma$  ergeben sich hieraus 8 Achsen ( $\alpha, \beta$ ). Durch Vergleich von (31) mit (29) sieht man, dass

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \beta_1 = -\beta$$

wird. Die 8 Achsen (31) gehören also paarweise zusammen, und wir erhalten 4 involutorische Transformationen.<sup>1</sup>

Setzt man  $\frac{p}{q} = 1$ , so erhält man wieder die 8 Achsen (31), aber in der Form

$$(32) \quad \alpha^2 = \frac{\sigma}{\lambda_1}, \quad \beta^2 = \frac{\sigma}{\lambda_3},$$

sodass

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta.$$

Hieraus kann man zunächst nichts schliessen; denn es war ja bei allen Rechnungen dieses Paragraphen vorausgesetzt, dass die Achsen verschieden waren. Doch wird man auf die Vermutung geführt, dass eine Gerade ( $\alpha, \beta$ ), welche (32) befriedigt, Achse einer gescharten Kollineation mit konsekutiven Achsen ist, die auf der Fläche (8)—(9) liegen. Dass dies wirklich der Fall ist, kann man z. B. durch einen Grenzübergang einsehen. Es gibt somit 8 solche Transformationen.

Wir betrachten nun besonders die Lage B. Es sei

$$(33) \quad \lambda_3 = \lambda_4, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3^2.$$

<sup>1</sup> Vgl. ROHN, S. 63.

Hier ist  $\sigma = \pm \lambda_3$ . Die brauchbaren Achsen werden aus der ersten Gleichung (30) erhalten und zerfallen in

$$(34) \quad \beta = \pm i, \quad \alpha \text{ beliebig}$$

und die früher in (15) angegebenen

$$(35) \quad \alpha = \pm \frac{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}, \quad \beta \text{ beliebig,}$$

Den Achsen (34) entsprechen für  $\sigma = \lambda_3$  nach (29) die Achsen

$$\beta_1 = \mp i, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \alpha}.$$

Hierdurch ist dargetan, dass die Tangenten an die Flächen  $\varphi$  und  $\varphi_1$  in ihren beiden Berührungspunkten paarweise als Achsen solcher gescharten Kollineationen zusammengehören, die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen.

Für  $\sigma = -\lambda_3$  erhält man dagegen

$$(36) \quad \beta_1 = \pm i, \quad \alpha_1 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1 \alpha}.$$

Nach (34) und (36) sollten nun entsprechende Achsen Tangenten in demselben Berührungspunkt der Flächen sein, also einander schneiden. Dem entsprechen keine Transformationen der betrachteten Art.

Die Achsen (35) können auch

$$(35 \text{ a}) \quad \alpha = \pm \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \beta \text{ beliebig,}$$

geschrieben werden. Ihnen entsprechen für  $\sigma = \lambda_3$  nach (29)

$$(37) \quad \alpha_1 = \pm \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\beta},$$

und ausserdem ergibt (30), dass  $\frac{p}{q} = 1$  ist. Dem entsprechen keine eigentlichen gescharten Kollineationen. Dagegen stehen die Formeln (35 a) und (37) in gewisser Verbindung damit, dass es 2 parabolische Homologien gibt, deren Homologieebenen mit den Kegelschnittsebenen zusammenfallen und die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen (man beachte nur, dass  $\varphi$  und  $\varphi_1$  mit zwei gleich grossen Kugeln projektiv äquivalent sind).

Für  $\sigma = -\lambda_3$  erhält man dagegen

$$\alpha_1 = \mp \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{\beta},$$

und (30) ergibt nun  $\frac{p}{q} = -1$ . Hierdurch sind  $\infty^1$  harmonische gescharte Kollineationen bestimmt, deren Achsen in je einer der Kegelschnittsebenen liegen.

Bei der Lage D gibt es niemals Lösungen, auch nicht solche, deren Achsen vom Typus II sind; denn die Bedingung (28) zieht, wie schon früher erwähnt, das vollständige Zusammenfallen der Flächen nach sich.

### § 5. Die Schnittfigur der Flächen ist ein windschiefes Viereck.

Wir gehen nun dazu über, die bisher ausgeschlossene Lage C zu betrachten. Zunächst bemerken wir, dass die in §§ 3—4 gegebenen Entwicklungen auch in diesem Fall anwendbar sind; nur geben sie nicht — jedenfalls nicht ohne weiteres — sämtliche Transformationen der betrachteten Art, teils weil ein Übergang zu einem anderen gemein-

samen Polartetraeder als Koordinatentetraeder neue Transformationen liefert (im Gegensatz zum Verhalten bei der Lage B), teils weil es hier Achsenpaare gibt, die kein Paar gegenüberliegender Kanten eines solchen Tetraeders schneiden.

Wir beginnen nichtsdestoweniger damit, die früheren Resultate auf die Lage C anzuwenden. Es sei  $\lambda_1 = \lambda_3$ ,  $\lambda_2 = \lambda_4$ . Dann ist (6) erfüllt; (7) reduziert sich auf

$$(38) \quad a = \pm \beta,$$

und die Fläche (8) zerfällt in die beiden Flächen zweiter Ordnung

$$(39) \quad x_1 x_4 = \pm x_2 x_3.$$

Die Gleichungen (29) und (30) werden hier

$$(40) \quad a a_1 = \beta \beta_1 = \frac{\sigma}{\lambda_1}$$

und

$$(41) \quad \frac{\sigma(1 + \alpha^2)}{\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2} = \frac{p}{q}.$$

Die harmonischen Transformationen sind durch

$$\alpha^2 = \beta^2 = -\frac{\sigma}{\lambda_1}$$

in Verbindung mit  $a_1 = -a$ ,  $\beta_1 = -\beta$  bestimmt. Ferner findet man für  $\frac{p}{q} = 1$

$$\alpha^2 = \beta^2 = \frac{\sigma}{\lambda_1}$$

sowie  $a_1 = a$ ,  $\beta_1 = \beta$ . Dies ergibt Transformationen, deren

Achsen zwei konsekutive Erzeugende einer der Flächen (39) sind.

Um Achsen zu finden, die ein anderes Paar gegenüberliegender Kanten des Koordinatentetraeders schneiden, vertauscht man am einfachsten die Indizes der  $\lambda$ . Die Annahme  $\lambda_1 = \lambda_4, \lambda_2 = \lambda_3$  ergibt etwas mit dem früheren ganz Analoges; es sei nun aber  $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4$ . Hierdurch werden diejenigen Achsen bestimmt, die die beiden Polaren schneiden, welche gegenüberliegende Kanten in allen gemeinsamen Polartetraedern sind. Soll diese letzte Annahme mit (6) verträglich sein, so muss

$$(42) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = -\lambda_4$$

sein. Ist dies erfüllt, so zerfällt (7) in

$$(43) \quad a = \pm i, \beta \text{ beliebig}$$

und

$$(44) \quad a \text{ beliebig, } \beta = \pm i.$$

Die entsprechenden Achsen sind die Tangentenbüschel in den 4 Berührungspunkten der Flächen. Ihre Zusammengehörigkeit erhält man aus (29) durch Einsetzen von  $\sigma = \pm \lambda_1$ . Indem wir auf die Ausführungen für die Lage B auf Seite 22 bezugnehmen, sehen wir, dass entsprechende Achsen Tangenten in gegenüberliegenden Berührungspunkten der Flächen sind. Die entsprechenden gescharten Kollineationen sind harmonisch.

Ein elementares Beispiel, wo die mittels (43) und (44) bestimmten Kollineationen existieren, hat man in den beiden Hyperboloiden

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad -x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

( $x, y, z$ , rechtwinklige Koordinaten).

Um nun einen vollständigen Überblick zu gewinnen und insbesondere alle Transformationen der gesuchten Art zu finden, wollen wir nach dieser Einleitung die Frage aufs neue angreifen, indem wir als Grundlage der Untersuchung nicht ein zufälliges der  $\infty^2$  gemeinsamen Polartetraeder benutzen, sondern die Schnittkurve der Flächen, die ja in ein windschiefes Viereck ausgeartet ist. Die gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Flächen werden von 4 Ebenenbüscheln gebildet, deren Achsen die Seiten des Vierecks sind. Notwendig und hinreichend dafür, dass eine Gerade die Flächen in denselben zwei Punkten schneidet und in zwei gemeinsamen Tangentialebenen liegt, ist, wie man leicht einsieht, dass die Gerade ein Paar gegenüberliegender Seiten des windschiefen Vierecks schneidet (ohne ganz auf einer der Flächen zu liegen). Also:

Bei der Lage C gibt es  $\infty^2$  Achsen vom Typus I, nämlich alle Geraden, die ein Paar gegenüberliegender Seiten im Schnittviereck der Flächen schneiden, ohne ganz auf einer der Flächen zu liegen. Sie bilden, wenn man von den genannten Ausnahmen absieht, zwei lineare Kongruenzen.

Hierzu kommen in gewissen Fällen, wie wir gesehen haben, 4 Geradenbüschel von Achsen vom Typus II.

Wir gehen nun zur Frage der Paarung der Achsen über. Das windschiefe Schnittviereck sei  $ABCD$  (Fig. 3); ferner sei  $a$  eine Achse vom Typus I, die  $AB$  und  $CD$  schneidet. Die Gerade  $a$  ist weder Erzeugende von  $\varphi$  noch von  $\varphi_1$ . Die eine durch  $a$  gehende gemeinsame Tangentialebene ist

durch  $a$  und  $AB$  festgelegt; ihre Berührungspunkte mit den Flächen liegen beide auf  $AB$ . Diese Gerade muss dann bei der Transformation invariant sein und demnach auch die andere Achse,  $b$ , schneiden. Also:

Eine Achse vom Typus I schneidet dieselben Seiten des windschiefen Schnittvierecks wie die zugehörige Achse; diese ist demnach ebenfalls vom Typus I.

Die normale Lage zweier zusammengehörigen Achsen vom Typus I ist die in Fig. 3 angegebene. Speziell kann die Achse  $a$  durch  $C$  gehen, d. h. sie schneidet ausserdem  $BC$ ;

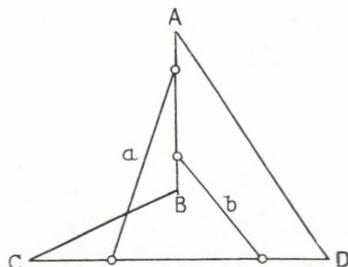


Fig. 3.

dies muss dann auch bei  $b$  der Fall sein, d. h.  $b$  muss durch  $B$  gehen. Noch spezieller kann  $a$  in die Diagonale  $AC$  fallen;  $b$  fällt dann in  $BD$ .

Um den Zusammenhang der Achsen vom Typus I durch eine analytische Behandlung näher festzustellen, wählen wir die Eckpunkte des windschiefen Vierecks als Grundpunkte des Koordinatensystems. Die Flächen  $\varphi$  und  $\varphi_1$  können dann

$$(45) \quad x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0$$

bzw.

$$(46) \quad \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_4 = 0$$

geschrieben werden. Wir suchen diejenigen Achsen, die  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$  schneiden. Ein Paar zusammengehöriger Achsen lässt sich dann wie früher

durch die Gleichungen (20) darstellen, und eine gescharte Kollineation mit diesen Achsen hat wieder das Aussehen (21). Führt man dies in (45) ein, so müssen zunächst die Glieder mit  $x'_1 x'_4$  und  $x'_2 x'_3$  verschwinden, also:

$$(47) \quad \begin{cases} p\beta(1 + \alpha_1\beta_1) = q\beta_1(1 + \alpha\beta), \\ p\alpha(1 + \alpha_1\beta_1) = q\alpha_1(1 + \alpha\beta). \end{cases}$$

Wir können hier voraussetzen, dass  $1 + \alpha\beta$  (und  $1 + \alpha_1\beta_1$ ) von 0 verschieden ist; denn sonst würde die entsprechende Gerade eine Erzeugende von  $\varphi$  sein. Demnach können die Gleichungen (47) auch in der Form

$$(48) \quad \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{p(1 + \alpha_1\beta_1)}{q(1 + \alpha\beta)}$$

geschrieben werden.

Einsetzen von (20) in die linke Seite von (45) ergibt nun, wenn die Striche weggelassen werden:

$$\frac{1}{(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \beta)} \left\{ x_1 x_3 [p^2(1 + \alpha_1\beta_1) - pq(\alpha_1\beta + \alpha\beta_1 + 2) + q^2(1 + \alpha\beta)] + x_2 x_4 [p^2\alpha\beta(1 + \alpha_1\beta_1) - pq(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + 2\alpha\alpha_1\beta\beta_1) + q^2\alpha_1\beta_1(1 + \alpha\beta)] \right\} = 0.$$

Benutzen wir wie in § 4 die Gleichungen (48) auf passende Weise dazu, überall den Faktor  $pq$  statt  $p^2$  oder  $q^2$  einzuführen, so finden wir, dass (45) durch die Transformation in

$$\frac{x_1 x_3}{\alpha\beta_1} + \alpha\beta_1 x_2 x_4 = 0$$

übergeht. Soll dies mit (46) übereinstimmen, so muss

$$(49) \quad \lambda_1^* \alpha\beta_1 = \frac{\lambda_2}{\alpha\beta_1}$$

sein.

Aus (48) und (49) lassen sich, wenn die Achse  $(\alpha, \beta)$

gegeben ist,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  sowie das charakteristische Doppelverhältnis  $\frac{p}{q}$  der Transformation bestimmen. Man erhält, wenn  $\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \sigma$  gesetzt wird:

$$(50) \quad \alpha_1 \beta = a \beta_1 = \frac{\sigma}{\lambda_1}$$

und

$$(51) \quad \frac{p}{q} = \frac{\sigma(a\beta + 1)}{\lambda_1 \alpha \beta + \lambda_2},$$

wo  $\sigma$  zwei verschiedene Werte haben kann, die gleich gross mit entgegengesetztem Vorzeichen sind. Aus diesen Formeln kann man durch Grenzübergang auch die Fälle erhalten, wo die Achsen durch einige der Ecken des windschiefen Vierecks gehen.

Wir bemerken insbesondere, dass die erste Gleichung (48) bedeutet, dass zwei zusammengehörige Achsen auf einer und derselben Fläche des Büschels

$$(52) \quad x_1 x_4 = k x_2 x_3$$

liegen.

Wollen wir wie früher insbesondere die harmonischen gescharten Kollineationen finden, die  $\varphi$  in  $\varphi_1$  überführen, so setzen wir in (51)  $\frac{p}{q} = -1$ . Nach Reduktion erhält man

$$\alpha \beta = -\frac{\sigma}{\lambda_1}.$$

Für zusammengehörige Achsen gilt dann  $\alpha_1 = -\alpha$ ,  $\beta_1 = -\beta$ .

Setzt man in (51)  $\frac{p}{q} = 1$ , so findet man auf dieselbe Weise

$$\alpha \beta = \frac{\sigma}{\lambda_1},$$

woraus  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta$  folgt. Dem entsprechen gescharte Kollineationen mit konsekutiven Achsen, die auf einer der Flächen (52) liegen. Einige von diesen sind schon auf Seite 24—25 gefunden worden.

Wir haben oben diejenigen Achsen betrachtet, welche das eine Paar gegenüberliegender Seiten des Schnittvierecks schneiden; die Achsen, die das andere Paar schneiden, verhalten sich in derselben Weise. Über eventuelle Achsen vom Typus II ist nur zu bemerken, dass man leicht sieht, dass sie die Flächen in einem Paar von gegenüberliegenden Eckpunkten des Schnittvierecks berühren müssen. Es kann dann keine anderen als die auf Seite 25 erwähnten geben, und diese existieren, wie wir sahen, nur in speziellen Fällen.

### § 6. Flächen mit einer gemeinsamen Erzeugenden.

Als Beispiel einer Lage, wo die Flächen  $\varphi$  und  $\varphi_1$  kein gemeinsames Polartetraeder haben, wollen wir zuletzt kurz den Fall betrachten, wo die Schnittkurve in eine Gerade

und eine Raumkurve dritter Ordnung ausartet, die einander in zwei getrennten Punkten schneiden.

Will man hier die Geradenpaare bestimmen, die gemeinsame Polaren der beiden Flächen sind, so zeigt es sich, dass es keine anderen gibt als die gemeinsame Erzeugende, die ihre eigene Polare in bezug auf beide Flächen ist. Nach § 1 müssen dann alle eventuellen Achsen diese Erzeugende schneiden.

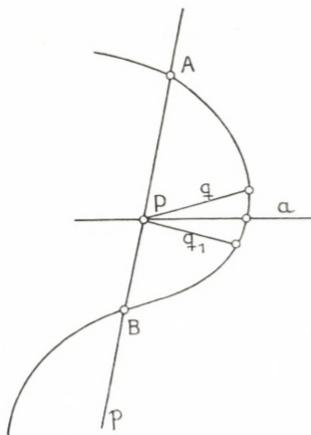


Fig. 4.

Die gemeinsame Erzeugende sei  $p$ , ihre Schnittpunkte mit der Kurve dritter Ordnung  $A$  und  $B$  (Fig. 4). Wir wollen die Achsen vom Typus I bestimmen. Da eine solche Achse in zwei gemeinsamen Tangentialebenen liegen soll, kann sie  $p$  weder in  $A$  noch in  $B$  schneiden. Wir suchen diejenigen Achsen, die  $p$  in einem beliebigen anderen Punkt  $P$  schneiden. Die durch  $P$  gehenden, von  $p$  verschiedenen Erzeugenden von  $\varphi$  und  $\varphi_1$  mögen  $q$  bzw.  $q_1$  heißen; die Ebene  $qq_1$  enthält  $p$  nicht. Eine durch  $P$  gehende, von  $p$  verschiedene Gerade, die in zwei gemeinsamen Tangentialebenen liegen soll, muss der Ebene  $qq_1$  angehören. Diese Ebene schneidet die Kurve dritter Ordnung in 3 Punkten, von denen der eine auf  $q$ , der zweite auf  $q_1$  liegt; der dritte ergibt, mit  $P$  verbunden, eine brauchbare Achse,  $a$ . Also:

Es gibt in dem hier betrachteten Fall  $\infty^1$  Achsen vom Typus I; durch jeden von  $A$  und  $B$  verschiedenen Punkt der gemeinsamen Erzeugenden geht eine.

